

Aufgabe 1:

a)

$$\begin{array}{cccc|l} -1 & 2 & -1 & 1 & \\ -1 & 4 & -2 & -4 & \text{II-I} \\ 2 & -2 & 1 & -4 & \text{III+2I} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} -1 & 2 & -1 & 1 & \\ 0 & 2 & -1 & -5 & \\ 0 & 2 & -1 & -2 & \text{III-II} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

3. und 4. Spalte vertauschen!

$$\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \Rightarrow \text{rg}(A)=3$$

Aus der letzten Gleichung kann man sofort $x_4=0$ ablesen!
Zu lösen ist nur noch:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= x_3 \\ 2x_2 &= x_3 \end{aligned}$$

$$x_3 = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_2 = 1 \end{array} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 0$$

allgemeine Lösung:
$$x = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & -1 & 2 & \\ 2 & -1 & -2 & 4 & \text{II-2I} \\ -1 & -4 & 1 & -2 & \text{III+I} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & -1 & 2 & \\ 0 & -3 & 0 & 0 & \\ 0 & -3 & 0 & 0 & \text{III-II} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \text{rg}(A)=2 \Rightarrow \dim(L)=2$$

Lösungen für 4.Übung Mathematik Sommersemester

Zu lösen ist:

$$x_1 + x_2 = x_3 - 2x_4$$

$$-3x_2 = 0$$

Aus der 2. Gleichung folgt sofort $x_2 = 0$!

Damit ist nur noch die Gleichung : $x_1 = x_3 - 2x_4$ zu lösen!

$$x_3 = 1; x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$x_3 = 0; x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = -2$$

allgemeine Lösung:
$$x = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

a)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & 2 & 19 \end{array} \quad \text{IV+I}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 21 \end{array} \quad \text{IV-3II}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 24 \end{array} \quad \text{IV-8III}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 16 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{rg(A)}=4$$

$$x_4 = 1,6$$

$$x_3 = 1 + x_4 = 2,6$$

$$x_2 = x_3 - 1 = 1,6$$

$$x_1 = 2 - x_2 = 0,4$$

eindeutige Lösung:

$$\begin{pmatrix} 0,4 \\ 1,6 \\ 2,6 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc|l}
 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & \\
 2 & -1 & -2 & 4 & 4 & \text{II}-2\text{I} \\
 -1 & -4 & 1 & -2 & 1 & \text{III}+\text{I}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l}
 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & \\
 0 & -3 & 0 & 0 & 2 & \\
 0 & -3 & 0 & 0 & 2 & \text{III}-\text{II}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\
 0 & -3 & 0 & 0 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Es wird $x_3 = 0$; $x_4 = 0$ gesetzt! Damit ist nur noch zu lösen:

$$\begin{array}{lcl}
 x_1 + x_2 = 1 & \Rightarrow & x_2 = -\frac{2}{3} \\
 -3x_2 = 2 & & \Rightarrow & x_1 = 1 - x_2 = \frac{5}{3}
 \end{array}$$

allgemeine Lösung:
$$x = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

a)
$$\begin{array}{ccccc|c}
 1 & 2 & -5 & -7 & -8 & \\
 -2 & -5 & 14 & 16 & 21 & -2 \\
 3 & 5 & -8 & -25 & -10 & 3 \\
 2 & 2 & 1 & -16 & 3 & 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c}
 1 & 2 & -5 & -7 & -8 & \\
 0 & -1 & 4 & 2 & 5 & \\
 0 & -1 & 7 & -4 & 14 & 1 \\
 0 & -2 & 11 & -2 & 19 & 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & 2 & -5 & -7 & -8 \\
 0 & -1 & 4 & 2 & 5 \\
 0 & 0 & 3 & -6 & 9 \\
 0 & 0 & 3 & -6 & 9
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & 2 & -5 & -7 & -8 \\
 0 & -1 & 4 & 2 & 5 \\
 0 & 0 & 3 & -6 & 9 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$$

$$x_4 = 1; x_5 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = 2; x_2 = 10; x_1 = -3$$

$$x_4 = 0; x_5 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = -3; x_2 = -7; x_1 = 7$$

$$x = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -6 & 1 & -1 & -4 & 3 \\ 3 & -14 & 2 & -1 & -7 & -2 \\ -2 & 13 & -4 & 3 & 9 & 2 \\ 2 & -12 & 2 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -6 & 1 & -1 & -4 & \\ 0 & 4 & -1 & 2 & 5 & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -6 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -7/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \Rightarrow \text{rg}(A) = 4; |A| = -21$$

$$\Rightarrow x_4 = 3$$

$$-\frac{7}{4} \cdot x_3 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot x_4 \Rightarrow x_3 = 1$$

$$4 \cdot x_2 = 5 + x_3 - 2 \cdot x_4 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$x_1 = -4 + 6 \cdot x_2 - x_3 + x_4 \Rightarrow x_1 = -2$$

Lösung:

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4:

a)

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & -1 & 0 & 20 \\ -6 & -5 & 0 & 2 & -45 \\ 2 & -5 & 6 & -6 & -3 \\ 4 & 6 & 2 & -3 & 58 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \text{II}+3\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \\ \text{IV}-2\text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 4 & -3 & 2 & 15 \\ 0 & -8 & 7 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 18 \end{array} \quad \text{III}+2\text{II}$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 4 & -3 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 18 \end{array} \quad \text{IV}-4\text{III}$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 4 & -3 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{rg}(A)=4$$

$$x_4 = -2$$

$$x_3 = 7 + 2x_4 = 3$$

$$x_2 = (15 + 3x_3 - 2x_4) / 4 = 28 / 4 = 7$$

$$x_1 = (20 - 3x_2 + x_3) / 2 = 2 / 2 = 1$$

eindeutige Lösung:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{array}{ccccc} 10 & 5 & 3 & 26 \\ 5 & 8 & -1 & 19 \\ 3 & -1 & 6 & 13 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \text{II} - \frac{1}{2}\text{I} \\ \text{III} - \frac{3}{10}\text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 10 & 5 & 3 & 26 \\ 0 & \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & 6 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{51}{10} & \frac{52}{10} \end{array} \quad \text{III} + \frac{5}{11}\text{II}$$

$$\begin{array}{ccccc} 10 & 5 & 3 & 26 \\ 0 & \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & 6 \\ 0 & 0 & \frac{872}{220} & \frac{1744}{220} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{rg}(A)=3$$

$$x_3 = 2$$

$$x_2 = \left(6 + \frac{5}{2}x_3\right) \cdot \frac{2}{11} = 11 \cdot \frac{2}{11} = 2$$

$$x_1 = (26 - 5x_2 - 3x_3) / 10 = (26 - 10 - 6) / 10 = 1$$

eindeutige Lösung: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$